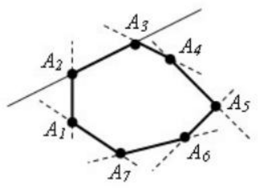
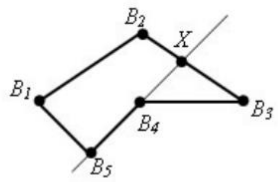
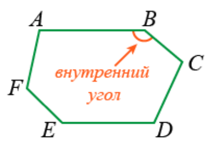
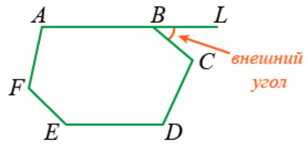
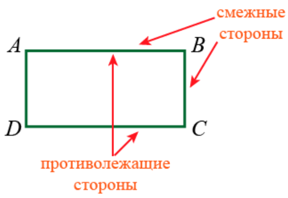
Справочник по геометрии за 8 класс (по учебнику Л.С. Атанасян)

Выпуклый многоугольник

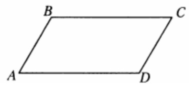
Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.	 Выпуклый многоугольник	 Невыпуклый многоугольник

Сумма углов выпуклого n-угольника	$(n-2)\cdot 180°$
Сумма углов выпуклого четырёхугольника	**360°**
$\angle ABC$, $\angle BCD, \ldots, \angle FAB$ – внутренние углы многоугольника. **Внешним углом** выпуклого многоугольника называется угол, смежный с углом многоугольника.	 
Сумма внешних углов выпуклого многоугольника	**360°**

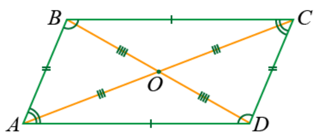
Четырёхугольники

Параллелограмм

- четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны		$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

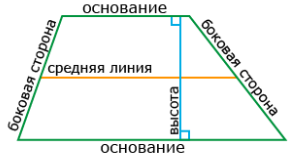
Свойства

1. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.		$AB = CD$ и $BC = DA$ $\angle ABC = \angle CDA$ и $\angle DAB = \angle BCD$
2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.		$AO = OC$ и $BO = OD$

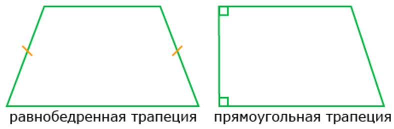
Признаки		Дополнительно
1. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник параллелограмм.	Если $ABCD$ – четырехугольник и $BC \parallel AD$; $BC = AD$, **то $ABCD$ – параллелограмм.**	• сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°: $\angle ABC + \angle BCD = 180°$ $\angle BCD + \angle CDA = 180°$ $\angle CDA + \angle DAB = 180°$ $\angle DAB + \angle ABC = 180°$
2. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник параллелограмм.	Если $ABCD$ – четырехугольник и $AB = DC$, $AD = BC$, **то $ABCD$ – параллелограмм.**	• каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника: $\Delta ABC = \Delta CDA$ и $\Delta ABD = \Delta BCD$ • точка пересечения диагоналей – это центр симметрии параллелограмма: Точка O – это центр симметрии.
3. Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник параллелограмм.	Если $ABCD$ – четырехугольник, $AC \cap BD = O$ и $AO = OC$; $BO = OD$, **то $ABCD$ – параллелограмм.**	

Трапеция

- четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.



Виды



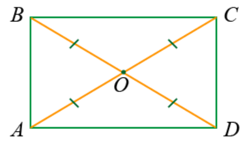
Прямоугольник

- параллелограмм, у которого все углы прямые.

Все свойства параллелограмма справедливы для прямоугольника.

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

Особое **свойство** прямоугольника:
Диагонали прямоугольника равны.



$AC = BD$

Дополнительно

$AO = OC$ и $BO = OD$ $\quad OD$

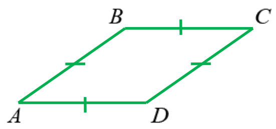
$AO = OC = BO = OD$ $\quad OD$

$\Delta ABC = \Delta CDA$ и $\Delta DAB = \Delta BCD$

Ромб

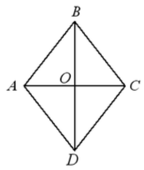
- параллелограмм, у которого все стороны равны.

Все свойства параллелограмма справедливы для ромба.



$AB = BC = CD = AD$

Особое **свойство** ромба:
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

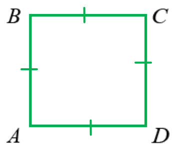


$AC \perp BD$

$\angle BAC = \angle DAC$

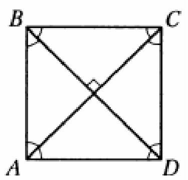
Квадрат

- прямоугольник, у которого все стороны равны.
Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.



$AB = BC = CD = AD$

Основные **свойства** квадрата:
1. Все углы квадрата прямые.
2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.



$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

$AC = BD,\ AC \perp BD$

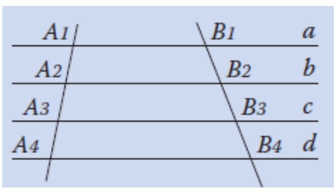
$AO = OC$ и $BO = OD$

$AO = OC = BO = OD$

AC и BD – биссектрисы углов

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



Если $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и

$a \parallel b \parallel c \parallel d$, то

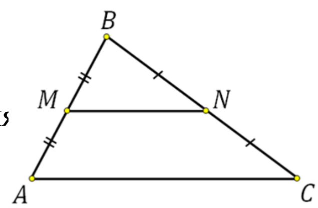
$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

Средняя линия треугольника

$AM = MB$;

$CN = BN$

MN – средняя линия Δ

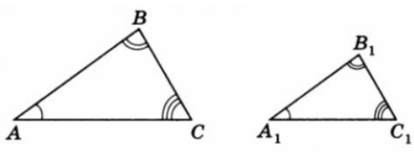


Свойства MN:

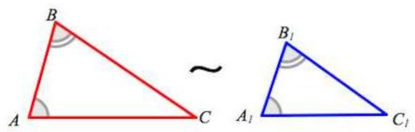
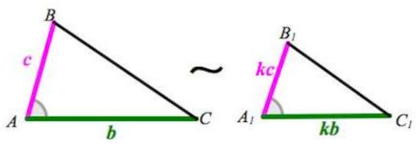
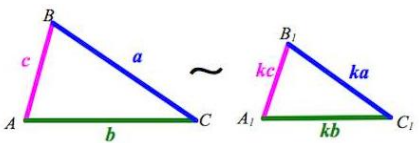
1. $MN \parallel AC$

2. $MN = \dfrac{1}{2} AC$

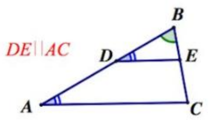
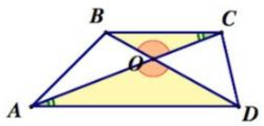
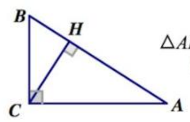
Подобные треугольники

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.	 $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$	$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1$ $\underbrace{AB=A_1B_1,\ BC=B_1C_1,\ AC=A_1C_1}_{\text{сходственные стороны}}$ $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=k$ k – коэффициент подобия
Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.	$\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}=k;\quad \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=k^2$	Отношение длин соответствующих биссектрис, медиан, высот, серединных перпендикуляров и других элементов подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

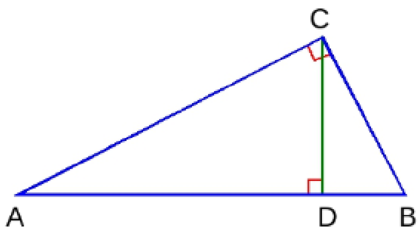
Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.		$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.		$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle A_1,\\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника и углы, то такие треугольники подобны.		$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Примеры подобных треугольников

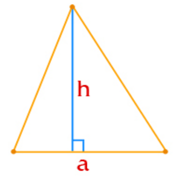
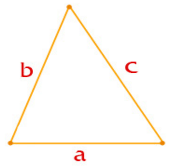
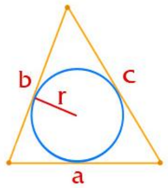
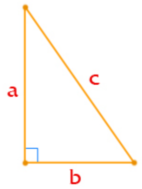
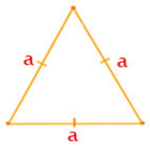
 $\Delta ABC \infty \Delta DBE$ (по I признаку)	 $\Delta AOD \infty \Delta COB$ (по I признаку)	 $\Delta ABC \infty \Delta ACH \infty \Delta CBH$ (по I признаку)

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

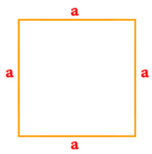
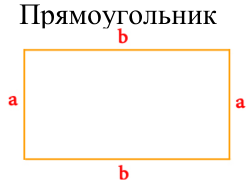
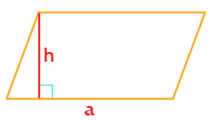
1. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.		$CD=\sqrt{AD\cdot DB}$ $CD^2=AD\cdot DB$
2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённого между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.	Отрезок XY**- средний пропорциональный** (средний геометрический) для *AB* и *CD*, если $XY=\sqrt{AB\cdot CD}$	1) $AC=\sqrt{AB\cdot AD}$ $AC^2=AB\cdot AD$ 2) $BC=\sqrt{AB\cdot BD}$ $BC^2=AB\cdot BD$

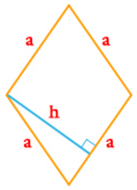
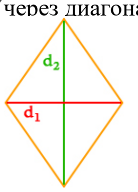
Площади фигур

Треугольники

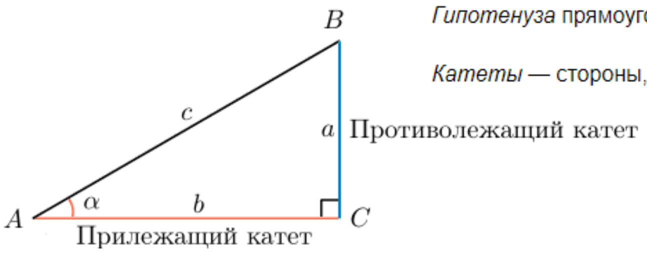
Чертёж	Элементы	Формула площади
Через основание и высоту 	a – основание h_a – высота проведенная к стороне	$S = \frac{1}{2} a h_a$
Формула Герона 	a, b, c – стороны p – полупериметр	$p = \frac{a+b+c}{2}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Через радиус вписанной окружности 	a, b, c – стороны r – радиус вписанной окружности p – полупериметр	$p = \frac{a+b+c}{2}$ $S = rp$
Площадь прямоугольного треугольника 	a, b – катеты	$S = \frac{1}{2} ab$
Площадь равностороннего треугольника 	a – сторона	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Четырёхугольники

Квадрат 	a – сторона	$S = a^2$
Прямоугольник 	a, b – стороны	$S = ab$
Параллелограмм 	a – основание h – высота	$S = ah$

Ромб (через основание и высоту) 	a – основание h – высота	$S = ah$ Эта формула основывается на определении ромба. **Ромб** – параллелограмм, у которого все стороны равны.
Ромб (через диагонали) 	d_1,d_2 – диагонали	$S = \frac{1}{2}d_1d_2$
Площадь трапеции через основания и высоту 	a, b – основания h – высота	$S = \frac{a+b}{2}h$

Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника



Гипотенуза прямоугольного треугольника — это сторона, лежащая напротив прямого угла.

Катеты — стороны, лежащие напротив острых углов.

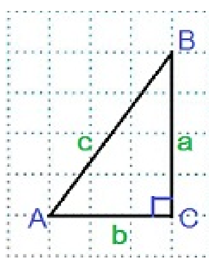
Определение	Формулы через *AB, BC, AC*	Формулы через *a, b, c*
Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе	$\sin A = \frac{BC}{AB}$	$\sin A = \frac{a}{c}$
Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе	$\cos A = \frac{AC}{AB}$	$\cos A = \frac{b}{c}$
Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету	$tg\ A = \frac{BC}{AC}$	$tg\ A = \frac{a}{b}$

Таблица значений синуса, косинуса и тангенса острых углов

α	**30°**	**45°**	**60°**
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

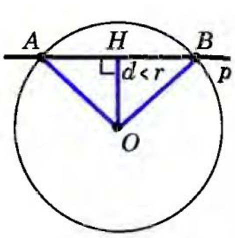
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Окружность

Взаимное расположение прямой и окружности

две общие точки

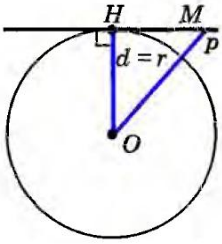
$OH = d$



$d < r$

одна общая точка

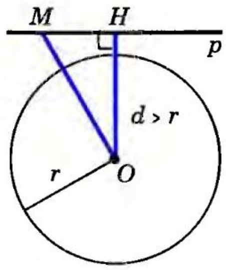
$OH = d$



$d = r$

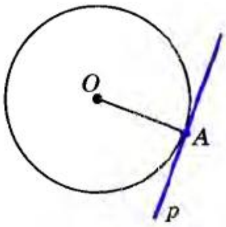
нет общих точек

$OH = d$



$d = r$

Касательная к окружности



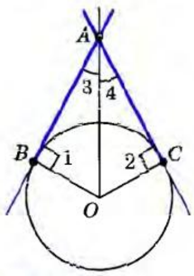
OA – радиус , r
p **–** касательная к окружности,
A **–** точка касания прямой и окружности

Т: Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

если ***p*** **–** касательная к окружности $\Rightarrow$
$OA \perp p$

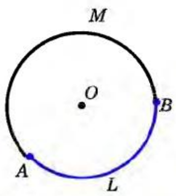
Обратная Т:
если $OA \perp p \Rightarrow$ ***p*** **–** касательная к окружности

Свойство:
AB и AC -касательные к окружности, $AB \cap AC = A$



$AB=AC$, $\angle 3 = \angle 4$

Градусная мера дуги окружности

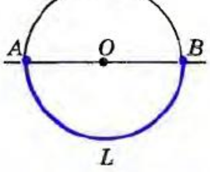


$\cup ALB$ и $\cup AMB$

(иногда обозначение используется без промежуточной точки $\cup AB$, когда ясно, о какой дуге идёт речь)
Дугу окружности измеряют в градусах.

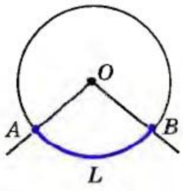
Центральный угол - угол с вершиной в центре окружности.
Дуга называется полуокружностью, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром окружности.

$\cup AB$ меньше или яляется полуокружностью $\Rightarrow$ её градусна мера равна градусной мере центрального угла.



$\smile ALB = 180°$

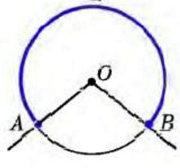
если $\angle AOB$ = 180°, ему соответствуют две полуокружности



$\smile ALB = \angle AOB$

если $\angle AOB$ < 180°, ему соответствуют дуга, меньше полуокружности

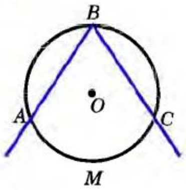
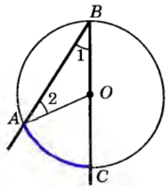
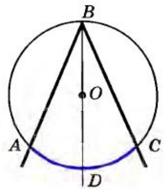
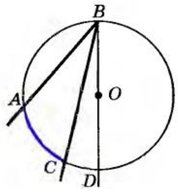
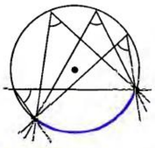
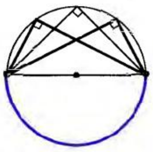
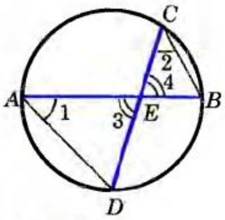
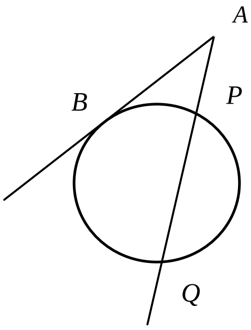
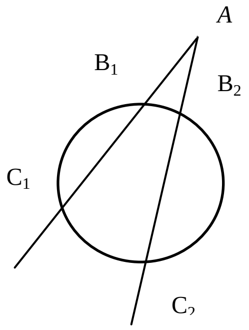
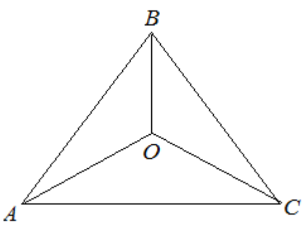
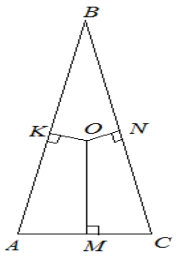
$\cup AB$ больше полуокружности $\Rightarrow$



$\smile ALB = 360° - \angle AOB$

если $\angle AOB$ > 180°, ему соответствуют дуга, больше полуокружности

Сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна **360°**

<table>
<tr><td colspan="4">Теорема о вписанном угле</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\angle AOB$ – вписанный, опирается на $\cup AMC$
</td><td colspan="3">Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.</td></tr>
<tr><td>1)Луч BO совпадает с одной из сторон BC</td><td>2)Луч BO делит $\angle ABC$ на два угла</td><td>3) Луч BO не делит $\angle ABC$ на два угла</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$</td></tr>
<tr><td>Следствие 1.
Вписанные углы, опирающиеся на одну и туже дугу, равны.

Следствие 2.
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность - прямой.
</td><td>Т. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

$\Delta ADE \sim \Delta CBE \Rightarrow$
$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$ или
$AE \cdot BE = CE \cdot DE$</td><td>№670

$AB^2 = AP \cdot AQ$</td><td>№672

$AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Четыре замечательные точки треугольника</td></tr>
<tr><td>1 замечательна точка – точка пересечения биссектрис

О – центр вписанной в треугольник окружности.
Всегда находится внутри Δ</td><td>2 замечательна точка – точка пересечения серединных перпендикуляров сторон Δ

О – центр описанной около треугольникаокружности.
Находится:
1) внутри Δ острыми углами;
2)вне Δ с тупым углом;
3)на гипотенузе прямоугольного Δ</td><td>3 замечательна точка – точка пересечения медиан

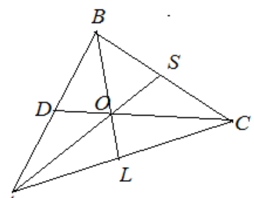
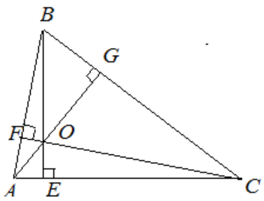
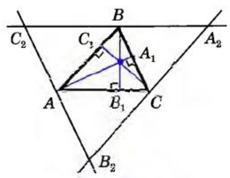
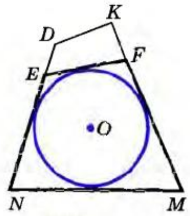



Рис.3
Т: Медианы Δ пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1 считая от вершины.

О – центр тяжести Δ</td><td>4 замечательна точка – точка пересечения высот

Т: Высоты Δ (или их продолжения) пересекаются в одной то

О – ортоцентр Δ</td></tr>
</table>

Вписанная окружность

Вписанная окружность - если все стороны многоугольника касаются окружности. Четырёхугольник *EFMN* – описанный около окружности.



Т: В любой Δ можно вписать окружность.

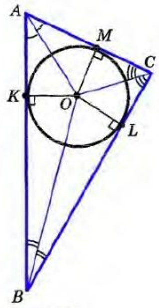
<u>Замечание 1:</u>
в Δ можно вписать только 1 окружность.

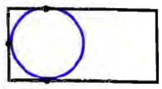
<u>Замечание 2:</u>

$S_{\Delta} = p \cdot r$

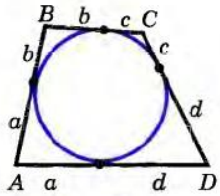
$p = \frac{AB+BC+AC}{2}$

<u>Замечание 3:</u>
Не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность





Свойство: В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны



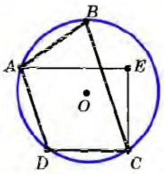
$$\left.\begin{aligned} AB + CD = a + b + c + d \\ BC + AD = a + b + c + d \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB + CD = BC + AD$$

<u>Верно и обратное утверждение:</u>
Если в выпуклом четырёхугольнике $AB + CD = BC + AD \Rightarrow$ в него можно вписать окружность.

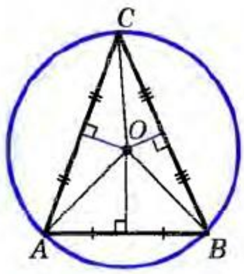
Описанная окружность

Описанная окружность – все вершины многоугольника лежат на окружности.



ABCD – вписан в окружность с центром О,
AECD – не является вписанным в окружность.

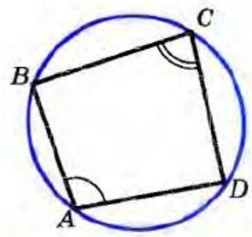
Т: Около любого Δ можно описать окружность.



<u>Замечание 1:</u>
около Δ можно описать только одну окружность.

<u>Замечание 2:</u>
Около четырёхугольника не всегда можно описать окружность.

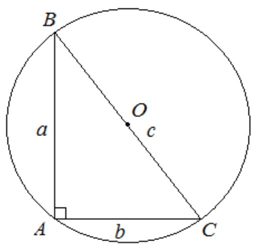
Свойство: В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.



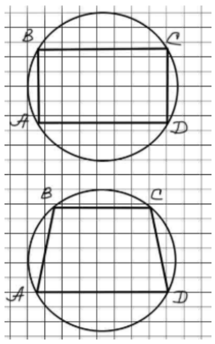
$\angle A + \angle C = 180°$,
$\angle B + \angle D = 180°$,

<u>Верно и обратное утверждение:</u>
Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

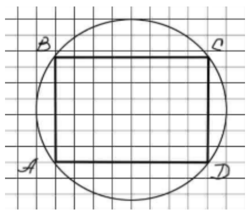
№704
Центр окружности, описанной около прямоугольного Δ, лежит на середине гипотенузы.
O – середина *BC*.



№708
Можно описать окружность около любого прямоугольника и любой равнобедренной трапеции.



№709
Если около параллелограмма можно опись окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник.



№710
Если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.